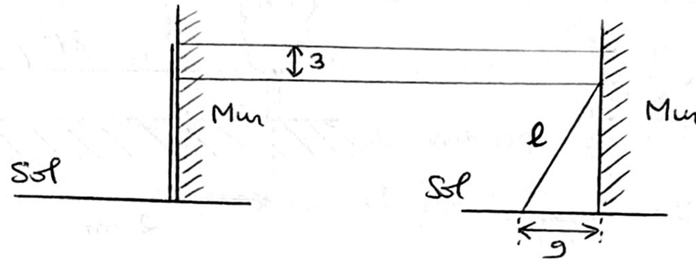
① Pb du roseau :

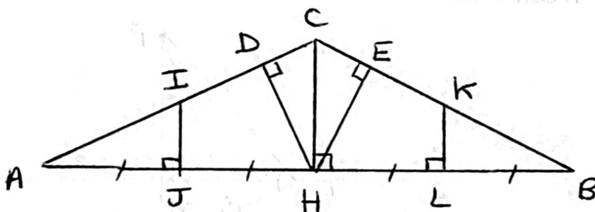
"Un roseau est placé verticalement contre un mur. S'il descend de 3 coudées, il s'écarte de 9 coudées. Qu'est le roseau ? Qu'est le mur ?"

(relevé du des tablettes d'argile mésopotamiennes, vers 2000 ans av JC. Le Th de Pythagore était connu bien avant Pythagore qui vécu au 4e siècle av. JC mais n'avait pas été démontré) (ref. Hocquenghem 80)



$\ell^2 = (\ell - 3)^2 + 9^2 \ldots$

② Charpenterie (CAP)



Le dessin ci-contre représente une ferme.

AB = 12 m (entrait)

AC = 6,5 m (arbalétrier)

Calculer le poinçon CH

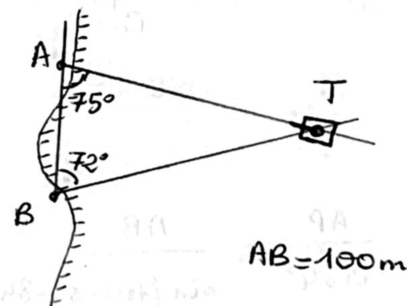
la contrefiche HD

le lien IJ

Sol. : CH = 2,5 m ; HD.AC = CH.AH $\Rightarrow$ HD = $\frac{30}{13}$; IJ = $\frac{CH}{2}$ = 1,25 m.

③ Distance du char à la tranchée (3ème)

Trouver AT dans le dessin :



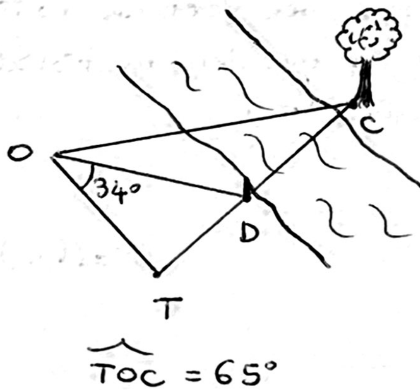
Sol : $\frac{100}{\sin(180 - \hat{A} - \hat{B})} = \frac{AT}{\sin \hat{B}}$

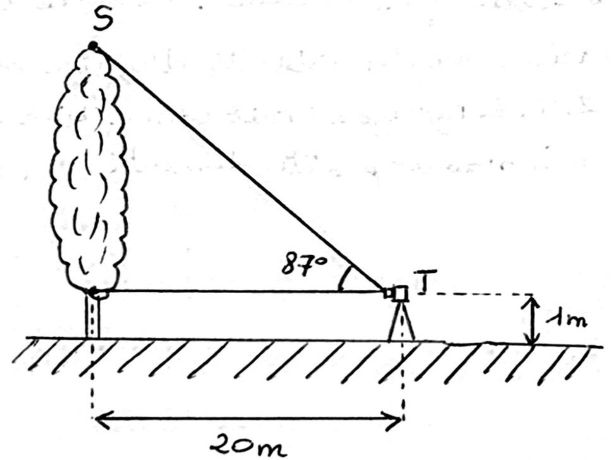
on trouve AT ≃ 174,6 m

Contexte : cet exercice ne peut être qu'une application, en 3ème, de l'exercice suivant établissant la formule $\frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c} = \frac{\sin \hat{A}}{a}$: "Calculer $\sin \hat{B}$ et $\sin \hat{C}$ dans la figure [figure : triangle ABC, hauteur AH, côtés c et b] et en déduire $\frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$".

④ Quelle est la hauteur de l'arbre ? (l'angle étant mesuré avec un goniomètre ou un théodolite)

Quelle est la largeur du fleuve ?

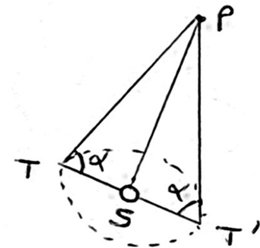




⑤ Quelle est la distance de l'étoile Proxima du Centaure au Soleil ? (réf. quid)

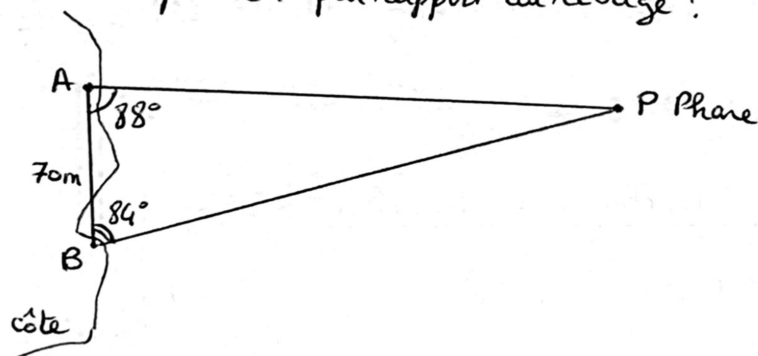
$\alpha \simeq 89,999789°$

$TS = 1 \text{ ua} \simeq 158.10^{-7}$ AL



Sol. $SP \simeq 4,3$ AL

⑥ Quelle est la position du phare P par rapport au rivage ?



Sol : $\frac{AP}{\sin 84°} = \frac{AB}{\sin(180-88-84)} \Rightarrow AP = \frac{AB.\sin 84°}{\sin 8°} \simeq 500,18$ m

⑦ Faire le point sur un seul amer (triangulation : cercle + boussole)

Amer = objet fixe et très visible situé sur la côte et servant de point de repère.

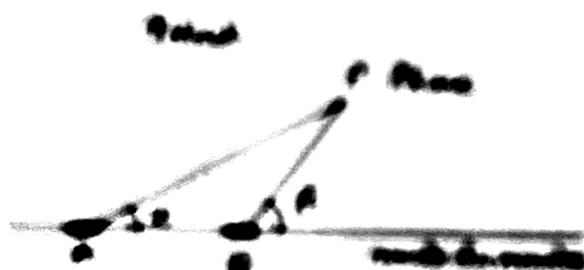
Un navire fait route vers l'est à vitesse constante connue v. A la date t_0, on aperçoit un phare et l'on mesure l'angle entre la direction du phare vu du navire et la route du navire. A la date $t_0 + t$, cet angle est mesuré à nouveau.

Peut-on déterminer alors la position exacte du navire ?

Application : $v = 5$ noeuds (1 noeud = 1,852 km/h)

$\alpha = 25°$ $\quad t_0 = 22h00$

$\beta = 35°$ $\quad t_0 + t = 23h00$



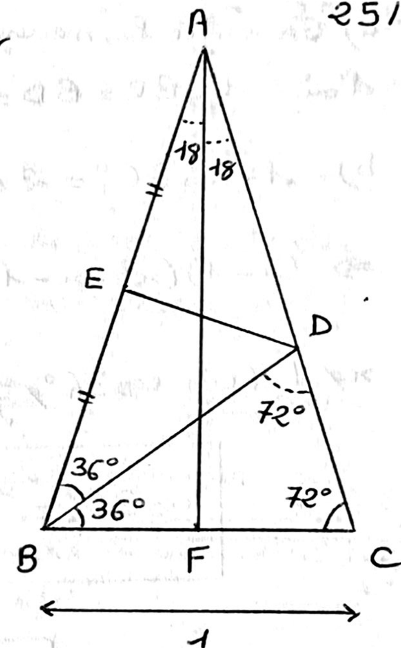
Sol :

$AB = vt$

$$\frac{PA}{\sin(\pi-\beta)} = \frac{PB}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin(\beta-\alpha)}$$

d'où
$$PA = \frac{vt\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$$
$$PB = \frac{vt\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$$

On positionne le bateau sur une carte grâce à P, à PA et PB et à la direction de la route du navire.



Calcul des lignes trigonométriques de $n°$, $n \in \mathbb{N}$

La connaissance de sin 1° suffit à déduire, de proche en proche cos 1°, tan 1°, sin 2°, etc ...

Tracer un triangle ABC isocèle en A, tel que $\hat{B} = 72°$ et $BC = 1$. La bissectrice de $\hat{B}$ coupe [AC] en D. E et F sont les milieux resp. de [AB] et [BC], et on note $AB = AC = x$.

a) Exprimer cos 36° et sin 18° en fct de x en utilisant des triangles rectangles de cette figure.

b) Former une équation vérifiée par x à l'aide de la formule

$$1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

En déduire x, puis cos 36° et sin 18°.

c) Trouver sin 36°, puis cos 6°, et en déduire :

$$\sin 3° = \frac{1}{4}\sqrt{8 - \sqrt{3} - \sqrt{15} - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$$

Donner une approximation de sin 3° à la calculatrice

d) Écrire $\sin 3\theta$ en fct de $\sin\theta$ et $\sin^3\theta$.

En déduire que sin 1° est solution de l'équation $\frac{4x^3 + \alpha}{3} = x$ (*)

où $\alpha = \sin 3°$

e) Résolution de (*) par Al Kashi (math. et astronome de l'observatoire de Samarkande, XVe siècle)

Posons $f(x) = \frac{4x^3 + \alpha}{3}$ où $\alpha \simeq 0{,}052\ 335\ 956$

Al Kashi considère la suite $x_0 = 0$, $x_1 = f(x_0)$, ..., $x_n = f(x_{n-1})$, ... et admit qu'elle convergeait vers la solution sin 1° de (*).
(La convergence de ce type de suite attendit la fin du XVIIIe siècle pour être démontrée !). Calculer x_3, puis à partir de sin 1° $\simeq x_3$, calculer cos 1°, tan 1°, sin 2°, cos 2°, tan 2°, sin 3°.

a) On vérifie les mesures des angles données sur la figure, et les angles droits...
d'où $1 = BC = BD = DA$ et $\cos 36° = \frac{x}{2}$; $\sin 18° = \frac{1}{2x}$

b) $1 - \cos 36° = 2\sin^2 18 \Rightarrow 1 - \frac{x}{2} = 2 \cdot \frac{1}{4x^2} \Rightarrow x^3 - 2x^2 + 1 = 0$

$\Rightarrow (x-1)(x^2 - x - 1) = 0$, d'où $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

$x \neq 1$ (car $\cos 36° \neq \frac{1}{2}$), et $x > 0$, donc $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, et :

$$\cos 36° = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \qquad \sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

c) $\sin 36° = \sqrt{1 - \cos^2 36°} = \dots = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$

$\cos 6° = \cos(36 - 30) = \cos 36 . \cos 30 + \sin 36 . \sin 30$

$= \frac{1+\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{8}\left(\sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \right)$

$\sin 3° = \frac{1 - \cos 6°}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{8 - \sqrt{3} - \sqrt{15} - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$

d) $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

$\alpha = 3x - 4x^3$

$$\frac{4x^3 + \alpha}{3} = x \qquad (*)$$

e) On trouve

$\sin 1 \simeq 0{,}0174524$

$\cos 1 \simeq 0{,}9998471$

$\tan 1 \simeq 0{,}0174551$

$\sin 2 = 2\sin 1 \cos 1 \simeq 0{,}0348995$

$\cos 2 = \sqrt{1 - \sin^2 2} = 1 - 2\sin^2 1 \simeq 0{,}9993908$

$\tan 2 \simeq 0{,}0349028$

$\sin 3 = \sin 2 \cos 1 + \sin 1 \cos 2 \simeq 0{,}0523359$ qui est une approximation à 10^{-7} près de la valeur prise pour α.

25/5/93

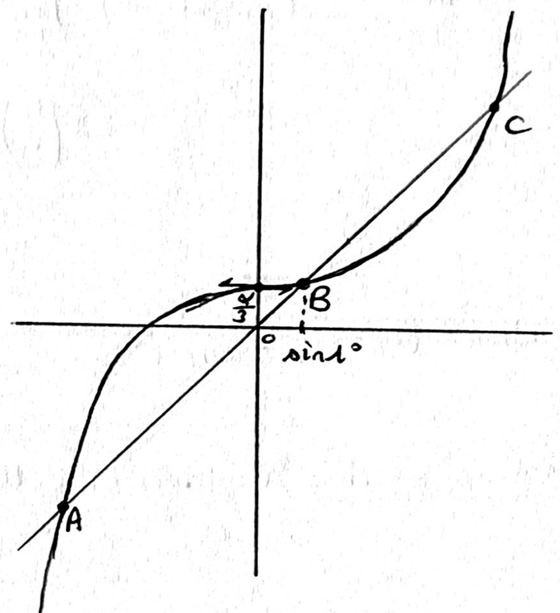
Contexte : Première S

NB : On vient de prouver que $\sin n°$, $\cos n°$ et $\tan n°$ sont des nombres algébriques pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui est surprenant !

Prolongement : Étudier la fonction $f(x) = \frac{4x^3 + \alpha}{3}$ et prouver la convergence de (x_n) vers $\sin 1°$ admise par Al Kashi (programme de TC, en donnant des indications sur la marche à suivre...).
On obtient :

* $f'(x) = 4x^2 > 0$ donc f est str. ↗.

Il y a 3 pts d'intersection de la courbe rep. de f et la dte $y = x$. Seul B est d'abscisse $\sin 1°$ (proche de 0)



* $g(x) = f(x) - x = \frac{4x^3 - \alpha}{3} - x$

$g(0) = \frac{\alpha}{3} > 0$

$g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\alpha}{3} + \frac{4}{81} - \frac{1}{3} < 0$

Ainsi $\sin 1° \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ apparaît comme l'unique pt fixe de f dans $\left[0, \frac{1}{3}\right]$. Comme :

$$f\left(\left[0, \tfrac{1}{3}\right]\right) \subset \left[f(0), f\left(\tfrac{1}{3}\right)\right] = \left[\frac{\alpha}{3}, \underbrace{\frac{4}{81} + \frac{\alpha}{3}}_{< 0,07}\right] \subset \left[0, \frac{1}{3}\right]$$

on pourra appliquer le Th du pt fixe si f est contractante sur $\left[0, \frac{1}{3}\right]$.

On a :

$$\forall \theta \in [0, \tfrac{1}{3}] \qquad |f'(\theta)| = 4\theta^2 \leq \frac{4}{9} < 1$$

donc (Inégalité des A-F) :

$$\forall x, y \in [0, \tfrac{1}{3}] \qquad |f(x) - f(y)| \leq \frac{4}{9} |x - y|$$

* Une façon commode de conclure est alors de se rattacher à la solution $\sin 1°$ de $f(x) = x$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad |x_n - \sin 1°| = |f(x_{n-1}) - f(\sin 1°)| \leq \frac{4}{9} |x_{n-1} - \sin 1°|$$

$$\leq \left(\frac{4}{9}\right)^2 |x_{n-2} - \sin 1°| \leq \dots \leq \underbrace{\left(\frac{4}{9}\right)^n |x_0 - \sin 1°|}_{\to 0 \ (n \to +\infty)}$$

donc $\lim x_n = \sin 1°$

<u>Prolongement</u> : Visualiser cette convergence sur un dessin :

